Concours des 24,25 et 26 mai 1982 d'admission en 1ère année
à L'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
( Options M.P.T.)
* * *
MATHÉMATIQUES

Un corrigé

**1er Problème :**

1. Posons $x(t) = t + \sin(t) - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y(t) = 3 + \cos(t) - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Soit $s(t)$ la fonction définie par $s'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} s'(t)^2 &= \left(1+\cos(t)-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \left(-\sin(t)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \\ &= 4 - 8\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Si $L(t)$ désigne la longueur de l'arc $\widehat{M(0)M(t)}$, alors :

$$L(t) = \int_0^t s'(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^t \left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = 2t - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

La longueur totale de l'arc $\mathscr{C}$ est donnée par $L(4\pi) = 8\pi$.

2. Le vecteur unitaire tangent $\overrightarrow{T}$ est donné par $\overrightarrow{T} = \frac{1}{s'(t)}\left(x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}\right)$ et le vecteur unitaire normal est donné par $\overrightarrow{N} = \mathbf{Rot}_{\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{T}\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{x'(t)}{s'(t)} &= \frac{1+\cos(t)-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \\ &= -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{s'(t)} &= \frac{-\sin(t)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \\ &= \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{T} = -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{N} = \mathbf{Rot}_{\frac{\pi}{2}}\left(\overrightarrow{T}\right) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{j}$.

Le rayon de courbure est donné par la formule $R(t) = \dfrac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|} = \dfrac{s'(t)^3}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}$.

$$\begin{aligned}
x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= \left(1 + \cos(t) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(-\cos(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&\quad - \left(-\sin(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(-\sin(t) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= -\cos(t) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) - 3 + 3\left(\cos t\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= -\cos(t) + 4\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 3 \\
&= 1 - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 3 = -2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

D'où $R(t) = \dfrac{\left[2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]^3}{2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} = 4\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

3 Le centre de courbure $\Omega$ est $\Omega = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) = X(t)\overrightarrow{i} + Y(t)\overrightarrow{j}$ où

$$X(t) = x(t) - \frac{s'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}y'(t), \quad X(t) = y(t) + \frac{s'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}x'(t).$$

$$\begin{aligned}
X(t) &= t + \sin(t) - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}{-2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}\left(-\sin(t) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= t + \sin(t) - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\left(-\sin(t) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= t - \sin(t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Y(t) &= 3 + \cos(t) - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{4\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}{-2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}\left(1 + \cos(t) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= 3 + \cos(t) - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 2\left(1 + \cos(t) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= 1 - \cos(t)
\end{aligned}$$

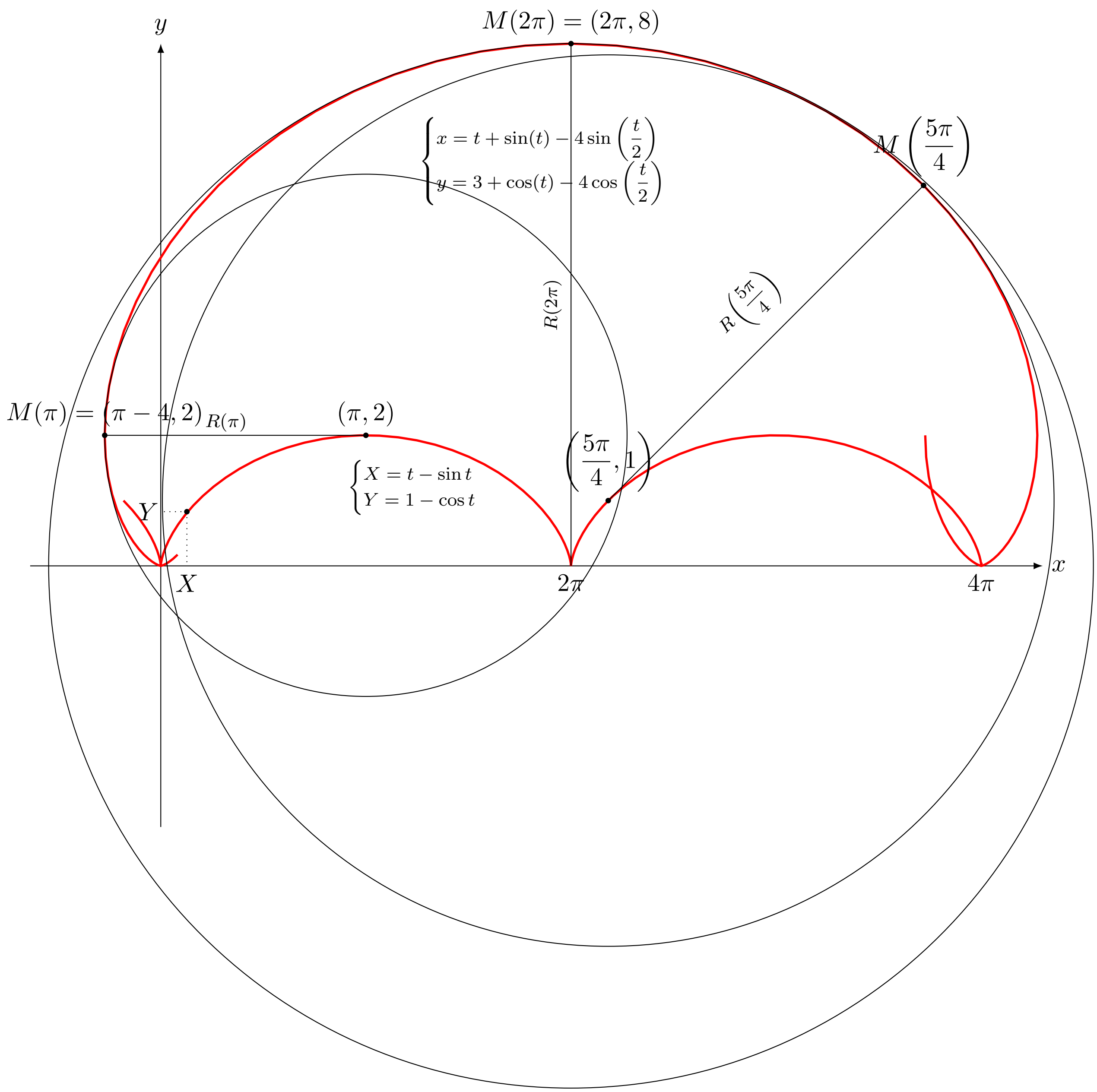
Le centre de courbure qui au temps $t = 0$ coïncide avec l'origine $O$ décrit une cycloïde définie par les fonctions $X(t) = t - \sin t$ et $Y(t) = 1 - \cos t$ qui sont bien des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$. On remarque que $X(t + 2\pi) = 2\pi + X(t)$ et $Y(t + 2\pi) = Y(t)$ : le point $M(t + 2\pi)$ se déduit de $M(t)$ par translation de vecteur $2\pi$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. De plus, la fonction $x$ étant impaire et $y$ paire, on restreint l'étude à $[0, \pi]$ puis on complète par symétrie par rapport à l'axe $(Oy)$.
Finalement, il suffit d'étudier la courbe sur $[0, \pi]$ puis on complète en utilisant successivement la symétrie par rapport à $(Oy)$, puis des translations successives de vecteur $2\pi$.
Les fonctions $X$ et $Y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = 1 - \cos t$ et $Y'(t) = \sin t$ .

| $t$ | $0$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $X'(t)$ | $0$ | $+$ | $2$ |
| $X(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi$ |
| $Y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ |
| $Y'(t)$ | $0$ | $+$ | $\pi$ |

La courbe va vers la droite en montant lorsque $t$ varie de $0$ à $\dfrac{\pi}{2}$. Le point $M(0)$, qui est l'origine, est singulier. Pour étudier l'existence d'une tangente en ce point,on considère

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{Y(t)-Y(0)}{X(t)-X(0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t-\sin t} = +\infty.$$

Par conséquent, la courbe possède une tangente de pente verticale au point $M(0)$.



**2ème Problème :**

1. Pour $x$ réel et $n$ entier naturel non nul donnés, on a

$$\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) = (\cos x + i\sin x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} i^k \mathtt{C}_{2n+1}^{k} \cos^{2n+1-k} x \sin^k x.$$

puis par identification des parties imaginaires

$$\sin(2n+1)x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathtt{C}_{2n+1}^{k} \cos^{2(n-k)} x \sin^{2k+1} x$$

et enfin en divisant les deux membres par $\sin^{2n+1} x$ pour $x \notin S = \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$, on obtient

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathtt{C}_{2n+1}^{k} \cot^{2(n-k)} x\,.$$

2. Tout d'abord, pour $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} \leq \dfrac{n\pi}{2n+1} < \dfrac{n\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi les nombres $\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts et dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Par injectivité de la fonction $x \mapsto \cot x$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, les $n$ nombres $\cot\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts et de plus strictement positifs. Finalement, les $n$ réels $x_k$ sont deux à deux distincts.
Maintenant, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = 0$. On a donc trouvé $n$ réels deux à deux distincts racines du polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathtt{C}_{2n+1}^{k} x^{n-k}$ qui est de degré $n$.

3. Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme permettent d'affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{\mathtt{C}_{2n+1}^{k}}{\mathtt{C}_{2n+1}^{k}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Ensuite, pour $x \notin S$, $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

4. Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont respectivement strictement concaves et strictement convexes sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les graphes de ces fonctions sont respectivement strictement au-dessous et strictement au-dessus de leur tangente en $(0,0)$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \ \sin x < x < \tan x.$$

   (a) Puisque, pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$, on a aussi après passage à l'inverse et élévation au carré

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \ \cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ est dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc,

$$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3},$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}\pi^2.$$

(b) Lorsque on fait tendre $n$ vers plus l'infini, les deux suites à gauche et à droite de l'encadrement précédent convergent vers la même valeur, on peut donc conclure que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}$ existe et que

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5 Remarquons d'abord que les deux séries $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^p}{p^2}$ et $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{(1}{(2p+1)^2}$ sont absolument convergentes. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2n} = \sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S_n + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où par passage à la limité :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De même, on a :

$$\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{-1}{4}S_n + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où par passage à la limité :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)p-1}{p^2} = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**3ème Problème :**

$$\mathscr{E} = \left\{ A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}, \;\; \forall i, j \in [\![1, n]\!] \right\}$$

Les matrices de $\mathscr{E}$ sont dites *semi-magiques*.

1 $\diamond$ $\mathscr{E}$ est non vide puisque la matrice nulle est un élément de $\mathscr{E}$.
$\diamond$ Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ deux éléments de $\mathscr{E}$ et $\alpha$ un nombre réel. On a :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \ \sum_{q=1}^{n}(a_{iq}+\alpha b_{iq}) = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} + \alpha\sum_{q=1}^{n} b_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj} + \alpha\sum_{p=1}^{n} b_{pj} = \sum_{p=1}^{n}(a_{pj}+\alpha b_{pj}).$$

Donc $A+\alpha B \in \mathscr{E}$. Ainsi $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$\diamond$ La dernière égalité montre aussi que $d(A+\alpha B) = d(A)+\alpha d(B)$, donc $d$ est une bien une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

2 L'égalité matricielle $AJ = JA = \lambda J$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore à $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Ainsi $A \in \mathscr{E}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

3 (a) Il suffit de vérifier que $\mathscr{E}$ contient la matrice unité $I_n$, ce qui est évident, et qu'il est stable par multiplication. En effet, si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ sont dans $\mathscr{E}$, on pose $C = AB = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{n} c_{iq} &= \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kq} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{q=1}^{n} b_{kq} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d(B) = d(B)d(A) \end{aligned}$$

De même, on trouve $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} c_{pj} = d(A)d(B)$. Donc $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} c_{iq} = \sum_{p=1}^{n} c_{pj}$, ainsi $AB \in \mathscr{E}$. De même on peut conclure que $d(AB) = d(A)d(B)$, de plus $d(I_n) = 1$ et $d(A+\alpha B) = d(A)+\alpha d(B)$ ( la première question ), ce qui montre que $d$ est un morphisme d'anneaux.

(b) $\diamond$ Si $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{E}$, alors $AJ = JA = d(A)J$. Si $d(A) = 0$, alors $AJ = 0$ et comme $A$ est inversible on obtient $A^{-1}AJ = J = 0$ ce qui est absurde, donc nécessairement $d(A) \neq 0$.

$\diamond$ L'égalité $AJ = JA = d(A)J$ s'écrit, en multipliant à gauche et à droite par $A^{-1}$, $A^{-1}J = JA^{-1} = \dfrac{1}{d(A)}J$ ce qui montre que $A^{-1} \in \mathscr{E}$ et que $d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}$.

$\diamond$ On a $d(J) = n \neq 0$, cependant $J$ n'est pas inversible. ( $\mathrm{rg}(J) = 1 < n$ )

4 On vérifie facilement que $BC = CB = 0$. Puisque $BC = CB$, on peut appliquer la formule de binôme :

$$A^p = (B+C)^p = A^p + \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{C}_p^k B^k C^{p-k} + B^p = A^p + B^p.$$

5 $\mathscr{F}$ est le noyau d'un forme linéaire non nulle sur $\mathscr{E}$ ( $d(J) \neq 0$ ), donc $\mathscr{F}$ est un hyperplan de $\mathscr{E}$. $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(J)$ est une droite vectorielle. Comme $J \notin \mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{S}$ sont deux espaces supplémentaires :

$$\mathscr{E} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{S}.$$

( voir cours sur les formes linéaires et les hyperplans )

6 (a) $\diamond$ On a $d(T_{r,s}) = 0$ pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, donc $T_{r,s} \in \mathscr{F}$.

$\diamond$ Soit $\displaystyle\sum_{2\leq r,s\leq n} \alpha_{rs} T_{r,s} = 0$ une combinaison linéaire nulle des éléments $T_{r,s}$, donc matriciellement

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{2\leq r,s\leq 2} \alpha_{rs} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $\alpha_{rs} = 0$ pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$. Donc la famille $(T_{r,s})_{2\leq r,s\leq n}$ est libre. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathscr{F}$, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice. En effet, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est un élément de $\mathscr{F}$, alors

$$\sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj} = 0,$$

alors $\forall r \in [\![2,n]\!]$, $a_{r1} = -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{rs}$ et $\forall s \in [\![2,n]\!]$, $a_{1s} = -\displaystyle\sum_{r=2}^{n} a_{rs}$, donc $A$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{rs} & -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{r2} & \dots & -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{rn} \\ -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{2s} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{ns} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{rs}(E_{11} - E_{1s} - E_{r1} + E_{rs}) = \sum_{2\leq r,s\leq s} a_{rs} T_{r,s} \end{aligned}$$

où $(E_{rs})_{1\leq r,s\leq n}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) La question précédente montre que $\dim \mathscr{F} = (n-1)^2$. De plus $\mathscr{E} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{S}$, donc $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{S} = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

• • • • • • • • •